

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA

UNIDAD DE CIENCIAS BÁSICAS

CÁLCULO INTEGRAL

CICLO II – 2025

Unidad IV: SUCESIONES Y SERIES.

Aprendizajes Esperados:

Al finalizar esta unidad, los estudiantes serán capaces de:

- Definir y diferenciar entre sucesiones y series infinitas, comprendiendo sus notaciones y propiedades básicas.
- Determinar la convergencia o divergencia de diversas series infinitas utilizando criterios como la prueba de la divergencia, la prueba de la integral, las pruebas de comparación (directa y de límite), y las pruebas de la razón y de la raíz.
- Identificar y manipular series geométricas, calculando su suma cuando sean convergentes.
- Representar funciones como series de potencias y determinar su radio e intervalo de convergencia.
- Desarrollar y aplicar series de Taylor y Maclaurin para aproximar funciones y resolver problemas.
- Introducir y aplicar los conceptos básicos de las series de Fourier para representar funciones periódicas.
- Resolver problemas que involucren el uso de sucesiones y series en contextos matemáticos y de aplicación.

SUCESIONES

En los ejercicios del 1 al 6 determinar los primeros cuatro términos de las sucesiones dadas

1) $\left\{\dfrac{n+3}{n^2+1}\right\}$ 2) $\{sen(n\pi)\}$

3) $\{\cos(n\pi)\}$ 4) $\left\{\dfrac{(-1)^n n^n}{2n+1}\right\}$

5) $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n}\right\}$ 6) $\left\{sen\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right\}$

7) Para cada sucesión dada definida recursivamente, escriba los primeros cinco términos de la sucesión dada.

$a)\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n\ ,\ a_1=-1$

$b)\ a_{n+1}=2a_n-1\ ,\ a_1=2$

$c)\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\ ,\ a_1=1\ ,\ a_2=3$

$d)\ a_{n+1}=2a_n-3a_{n-1}\ ,\ a_1=2\ ,\ a_2=4$

En los ejercicios del 8 al 11 determinar el término general de las sucesiones dadas.

8) $\{10, 20\ ,\ 40\ ,80\ ,160, \cdots\}$

9) $\left\{\dfrac{3}{2}, \dfrac{48}{5}, \dfrac{243}{10}, \dfrac{768}{17}, \ldots\right\}$

10) $\left\{\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, -\dfrac{1}{6}, \cdots\right\}$

11) $\left\{\dfrac{2}{3}\ ,\ 2\ ,\ 4\ ,\ \dfrac{20}{3}\ ,10\ ,\ 14\ ,\ \dfrac{56}{3}\ ,\ \cdots\right\}$

En los ejercicios del 12 al 17, determinar si la sucesión es aritmética o geométrica y determinar el termino general.

12) $\{1\ ,\ 5\ ,9\ ,13\ ,\cdots\}$

13) $\{12,36,108,324,\cdots\}$

14) $\{8,11,14,17,20,\cdots\}$

15) $\left\{\frac{8}{5},\frac{32}{25},\frac{128}{125},\frac{512}{625},\cdots\right\}$

16) $\{-1,-3,-5,-7,\cdots\}$

17) $\left\{\frac{3}{5},\frac{3}{25},\frac{3}{125},\frac{3}{625},\cdots\right\}$

De los ejercicios de 18 al 26, determine cuales de las sucesiones convergen y cuales divergen.

18) $\left\{\frac{n^2-1}{2n}\right\}$

19) $\left\{\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right\}$

20) $\left\{\left(1-\frac{5}{n}\right)^n\right\}$

21) $\left\{\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}(n)\right\}$

22) $\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}$

23) $\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}$

24) $\left\{(-1)^n\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right\}$

25) $\left\{(-1)^n\left(\frac{2}{n(n+1)}\right)\right\}$

26) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{(n+2)}{4n-3}\right\}$

27) Una pelota se deja caer desde una altura inicial de 15 metros sobre una plancha de concreto. Cada vez que rebota, alcanza una altura de 2/3 de su altura precedente. ¿A qué altura llegará en su tercer rebote? ¿En su n-ésimo rebote?

28) Un paciente toma 15 mg de un fármaco cada día. Suponga que 80% del fármaco acumulado es excretado cada día por las funciones corporales. Escriba los primeros seis términos de la sucesión $\{a_n\}$, donde a_n es la cantidad del fármaco presente en el cuerpo del paciente inmediatamente después de la dosis n-ésima.

SERIES

1) Escriba los 4 primeros términos de la sucesión de sumas parciales de las series siguientes

a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{5}{17}+\frac{5}{26}+\cdots$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{4n-3}$

c) $5+\frac{7}{2}+\frac{3}{2}+\frac{11}{24}+\frac{13}{120}+\cdots$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!(n+1)}$

2) Determine S_n para cada una de las series siguientes. Sugerencia: utilizar fracciones parciales.

a) $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

b) $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+4)(n+5)}$

3) Determine S_n para cada una de las series siguientes.

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(2n-1)$$

$$b)\ \sum_{k=1}^{+\infty}(5-4k)$$

$$c)\ -1+4+9+14+\cdots$$

4) Determine si las siguientes series son convergentes o divergentes. Si convergen, indicar a que valor convergen.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}4\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}\right)^{n-1}$

c) $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n}$ d) $\sum_{n=1}^{+\infty}7\left(\frac{2}{5}\right)^{n}$

e) $\sum_{n=2}^{+\infty}5\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

5) Determine la convergencia o divergencia de las series siguientes.

$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n^2-5}{3n+3}$ $b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+3}{5n^3+7}$ $c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2+3}{5n^2+7}$

6) Utilizando el criterio de la integral, indique si la serie converge o diverge.

$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+5n^2}$ $b)\ \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln(n))}$ $c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2+3}{5n^2+7}$

$d)\ 1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots$

7) Determine cuales de las siguientes series convergen o divergen.

$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^5}$ $b)\ \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{3}{k^{0.75}}$

$c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5}{\sqrt[4]{n}}$ $d)\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$

8) Utilizando el criterio de las proporciones o de la raíz indique cuales de las series convergen.

$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ $b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n^n}$

$c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5}{\sqrt[4]{n}}$ $d)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{e^{n+1}}$

$e)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6^{2n+1}}{n^n}$ $f)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3 2^{n+3}}{7^{n-1}}$

$g)\ \sum_{n=1}^{+\infty}n\left(\frac{2}{5}\right)^{n}$

9) Utilice la prueba de la serie alternante para determinar si la serie dada converge.

$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+3}$ $b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

10) Determine cuales de las series convergen absolutamente.

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2}{5}\right)^{n}$$

$$b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{n}{3^{n}}$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}}{5^{n}}$$

SERIES DE POTENCIAS

1) Determine el radio y el intervalo de convergencia de la serie.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} n!3^{n}\left(x+7\right)^{n}$$

$$b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-5\right)^{n}}{n^{4}}$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{\left(n!\right)^{2}}\left(\frac{x+4}{7}\right)^{n}$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-5\right)^{k}}{k3^{k}}$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(3x-1\right)^{n}}{n^{2}+n}$$

2) Utilizando la serie geométrica. Escribir como una serie de potencia.

$$a)\ \frac{1}{1+5x}$$

$$b)\ \frac{1}{1+x^{3}}$$

$$c)\ \frac{-3x^{2}}{\left(1+x^{3}\right)^{2}}$$

$$d)\ \frac{1}{1-x^{2}}$$

$$e)\ \ln(x+1)$$

SERIES DE TAYLOR Y MACLAURIN

1) Determine la serie de Maclaurin para cada función dada.

$$a)\ f(x)=\frac{1}{2-x}$$

$$b)\ f(x)=\cos(2x)$$

$$c)\ f(x)=\ln(1+2x)$$

2) Determinar la serie de Taylor de la función dada centrada en el valor indicado.

$$a)\ f(x)=e^{x},\ a=1$$

$$b)\ f(x)=\sqrt{x}\ ,\ a=1$$

$$c)\ f(x)=\cos\left(x\right)\quad a=\frac{\pi}{6}$$

3. Utilizando la tabla siguiente encuentre la suma de la serie dada.

$$a)\ 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

$$b)\ \frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots$$

$$c)\ 1-\frac{\pi^2}{2!}+\frac{\pi^4}{4!}-\frac{\pi^6}{6!}+\cdots$$

$$d)\ \pi-\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5}{5!}-\frac{\pi^7}{7!}+\cdots$$

Series de Maclaurin	*Intervalo de convergencia*
$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$	$]-\infty,+\infty[$
$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$	$]-\infty,+\infty[$
$sen(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$	$]-\infty,+\infty[$
$\tan^{-1}(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1}$	$[-1,1]$
$\cosh(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$]-\infty,+\infty[$
$senh(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$]-\infty,+\infty[$
$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$	$[-1,1]$

SERIES DE FOURIER

1) Verificar si las funciones dadas son ortogonales en el intervalo indicado.

$$a)\ f_1(x)=e^{x},\ f_2(x)=xe^{-x}-e^{-x};[0,2]$$

$$b)\ f_1(x)=x,\ f_2(x)=\cos(2x);\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$c)\ f_1(x)=\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right),\ f_2(x)=sen\left(\frac{m\pi}{p}x\right);[-p,p],\ m\neq n$$

2) Encuentre la serie de Fourier de:

$$a)\ f(x)=\begin{cases}1, & -1<x<0\\ x, & 0\leq x<1\end{cases}$$

$$b)\ f(x)=\begin{cases}2+x, & -2<x<0\\ 2, & 0\leq x<2\end{cases}$$

$$c)\ f(x)=\begin{cases}\pi^2, & -\pi<x<0\\ \pi^2-x^2, & 0\leq x<\pi\end{cases}$$

3) Desarrolle la función f en una serie apropiada de cosenos y senos.

$$a)\ f(x)=\begin{cases}1, & -2<x<-1\\ 0, & -1<x<1\\ 1, & 0<x<2\end{cases}$$

$$b)\ f(x)=x^3,\ -\pi<x<\pi$$

$$c)\ f(x)=|sen(x)|,\ -\pi<x<\pi$$

$$d)\ f(x)=\begin{cases}1, & -2<x<-1\\ -x, & -1\leq x<0\\ x, & 0\leq x<1\\ 1, & 1\leq x<2\end{cases}$$